УДК 519.833

Оптимизация транспортной системы энергетического рынка*.

Васин А. А., Григорьева О. М., Цыганов Н.И.
МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва

Рынки природного газа, нефти и электроэнергии играют важную роль в экономике многих стран. Каждый такой рынок включает свою собственную систему передачи. Потребители и производители расположены в различных узлах, соединенных транспортными линиями. Доля затрат на передачу в окончательной стоимости ресурса, как правило, велика, поэтому задача оптимизации транспортной системы представляет большой практический интерес. В работе [1] определяется оптимальная пропускная способность для рынка с двумя узлами. В данной работе мы рассматриваем общую проблему оптимизации общественного благосостояния с учетом производственных затрат, полезности потребления и затрат на увеличение пропускных способностей. Сложность проблемы определяется наличием существенных фиксированных расходов, связанных с расширением

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант РФФИ 16-01-00353\16.

линий передачи. В целом проблема оптимизации транспортной системы - NP–трудная (см. [2]). В работе [3] указаны некоторые случаи, когда функция благосостояния обладает свойствами субмодулярности или супермодулярности на множестве линий. В настоящей работе описан новый алгоритм оптимизации транспортной системы в случае супермодулярности. Приводятся результаты вычислительных экспериментов, показывающие его эффективность. Предлагается обобщение указанных свойств в форме понятий дополнительных и конкурентных транспортных линий. Для рынков с древовидной структурой указываются условия, при которых для любой пары линий можно установить, являются ли они конкурентными или дополнительными.

Мы рассматриваем рынок однородного товара, состоящий из нескольких локальных рынков и сетевой системы передачи. Обозначим через N множество узлов, соответствующих локальным рынкам, и $L \subseteq N \times N$ - множество ребер, соответствующих линиям связи. Каждый узел $i \in N$ соответствует местному совершенно конкурентному рынку, цена на котором определяется из условия баланса спроса, предложения, притока и оттока товара по системе передачи. Функция спроса $D_i\ (p_i)$, зависящая от цены p_i, и функция $c_i(v)$ себестоимости производства объема v в узле i характеризуют соответственно потребителей и производителей на рынке i. Функция спроса монотонно убывает по цене и связана с функцией полезности потребления: $U_i(q) = \int_0^q D_i^{-1}(v)dv$, где q – количество потребленного товара. Функция $c_i(v)$ монотонно возрастает и выпукла. Каждая линия передачи $(i,j) \in L$ характеризуется начальной пропускной способностью Q_{ij}^0, удельными затратами e_t^{ij} на передачу единицы товара, функцией затрат на увеличение пропускной способности, включающей постоянные затраты e_f^{ij} и переменные $e_v^{ij}(Q_{ij}, Q_{ij}^0)$, причем e_v^{ij} - монотонная выпуклая функция прироста $(Q_{ij} - Q_{ij}^0)$, $e_v^{ij}(0) = 0$. Указанная стоимость расширения линии соответствует ставке погашения единовременной стоимости строительства OC_{ij} в течение срока службы T_{ij} с использованием кредита с процентной ставкой r: $e^{ij} = rOC_{ij}/(1 - e^{rT_{ij}})$ (см. [4]). Обозначим через q_{ij} поток от рынка i к рынку j, $q_{ij} = -q_{ji}$, $Z(i)$ - множество узлов, соединенных с узлом i. При любых фиксированных потоках $\vec{q} = (q_{ij}, (i,\ j) \in L)$ и объемах производства $\vec{v} = (v_i, i \in N)$ *общественное благосостояние* для данного сетевого рынка составляет:

$$W(\vec{q}, \vec{v}) = \sum_{i \in N} \left[U_i\left(v_i + \sum_{i \in N} q_{ij}\right) - c_i(v_i) \right] - \sum_{(i,j) \in L, i<j} E_{ij}(q_{ij}),$$

$$\text{где } E_{ij}(q_{ij}) = \begin{cases} e_f^{ij} + e_v^{ij}\left(|q_{ij}| - Q_{ij}^0\right) + e_t^{ij}|q_{ij}|, & |q_{ij}| > Q_{ij}^0, \\ e_t^{ij}|q_{ij}|, & |q_{ij}| \le Q_{ij}^0. \end{cases}$$

То есть, общественное благосостояние включает суммарную полезность потребления за вычетом затрат на производство, расширение линий связи и транспортировку товара.

Цель нашего исследования – разработать эффективные методы решения задачи оптимизации благосостояния:

$$\max_{\vec{q},\vec{v}} W(\vec{q},\vec{v}). \qquad (1)$$

В качестве вспомогательной рассмотрим задачу с фиксированным набором $\mathrm{R} \subseteq L$ расширяемых линий:

$$\max_{\vec{q},\vec{v}} W(\vec{q},\ \vec{v},\ \mathrm{R}) , \qquad (2)$$

где, в отличие от (1), $|q_{ij}| \le Q^0_{ij}$ для $(i,j) \in L\backslash R$ и постоянные затраты всегда включены в E_{ij} для $(i,j) \in R$. Обозначим через $V(R)$ значение максимального благосостояния в последней задаче. Тогда задача (1) сводится к поиску $L^* = Arg\, max_{R\subseteq L} V(R)$.

Рассмотрим также понятие конкурентного равновесия для рынка с фиксированным набором R. Функция предложения $S_i(p)$ определяет оптимальный объем производства в узле i: $S_i(p) = Arg\, max_v (pv - c_i(v))$. Суммарная прибыль производителей в узле i с ценой $\bar{p}$ $\mathrm{Pr}_i(\bar{p}) = \int_0^{\bar{p}} S_i(p)dp$. Обозначим через $\Delta S_i(p_i) = S_i(p_i) - D_i(p_i)$ разность предложения и спроса в узле i. Совокупность векторов цен $\vec{p} = (p_i, i \in N)$, объемов производства $\vec{v} = (v_i, i \in N)$ и потоков $\vec{q} = (q_{ij}, (i,j) \in L)$ называется конкурентным равновесием данного рынка, если она удовлетворяет следующим условиям: $v_i = S_i(p_i)$

(объем выпуска максимизирует прибыль при данной цене p_i), $i \in N$; для любого $i \in N$ $\Delta S_i(p_i) = \sum_{i \in Z(i)} q_{ij}$, то есть цена p_i балансирует спрос и предложение в данном узле с учетом вектора потоков $\vec{q}$;

$$\forall (i,j) \notin R \qquad q_{ij} = 0, \text{если } |p_i - p_j| < e_t^{ij}, \qquad (*)$$

$$|q_{ij}| = Q_{ij}^0, \text{если } |p_i - p_j| > e_t^{ij},$$

$$|q_{ij}| \le Q_{ij}^0, \text{если } |p_i - p_j| = e_t^{ij}, \qquad (**)$$

то есть поток между i,j растет до тех пор, пока перевозка товара является прибыльной для мелкого посредника (арбитражера), $\forall\,(i,j) \in R$ $q_{ij} > Q_{ij}^0 \Rightarrow p_j - p_i = e_t^{ij} + e_v^{ij\prime}(q_{ij})$, также выполняются условия (*,**).

Теорема 1. *Задача (2) с фиксированным множеством R является задачей выпуклого программирования. Ее решение удовлетворяет условиям первого порядка, определяющим конкурентное равновесие соответствующего сетевого рынка*.

Данный результат конкретизирует известную теорему благосостояния (см. [5]) для исследуемого рынка. Таким образом, для решения задачи (2) могут быть использованы известные численные методы (см. [6]). Далее рассмотрим задачу поиска оптимального множества L^*. В ряде случаев для ее решения удается использовать свойства субмодулярности или супермодулярности функции общественного благосостояния. Напомним (см. [7]), что функция $W(R)$, определенная для каждого подмножества R конечного множества L, является субмодулярной (соответственно супермодулярной) на L, если $\forall L_1, L_2 \subseteq L$ $W(L_1) + W(L_2) \geq (\leq) W(L_1 \cup L_2) + W(L_1 \cap L_2)$.

Для любого вектора $\vec{Q} = \{Q_{ij}, (i,j) \in L\}$ пропускных способностей рассмотрим исходный рынок без затрат на строительство и при ограничениях $|q_{ij}| \leq Q_{ij}$, $(i,j) \in L$. Обозначим через $p_i(\vec{Q})$, $i \in N$,

равновесные цены, соответствующие такому рынку.

В [3] получен следующий результат относительно супермодулярности функции благосостояния для рынка типа цепи, где $L = \{(i, i+1), i = 1, \dots, n-1\}$.

Теорема 2. *Пусть начальные цены* $p_i(\vec{Q}^0), i = 1, .., n$, *монотонно убывают по* i. *Тогда функция* $W(R)$ *является супермодулярной.*

В общем случае (при $\vec{Q}^0 \neq 0$) задача остается NP-трудной. Рассмотрим алгоритм, который позволяет в среднем эффективно находить оптимальный набор L^* для случайно выбранной супермодулярной функции $W(R)$. Алгоритм работает с нижней оценкой L_{min} и верхней оценкой L_{max} множества L^*. На каждом шаге производится попытка либо расширить текущее множество L_{min}, добавляя очередное подмножество $S \subseteq L_{max} \backslash L_{min}$, либо сузить текущее множество L_{max}, исключая очередное подмножество $S' \subseteq L_{max} \backslash L_{min}$. Если на текущем шаге количество исключаемых элементов k^2 меньше, чем количество k^1 добавляемых, то выполняется операция исключения. В противном случае выполняется добавление. Если $k^1 + k^2 > |L_{max} \backslash L_{min}|$, то $L^* = Arg\, max\big(W(L_{min}), W(L_{max})\big)$, решение найдено. Алгоритм основан на следующем утверждении.

Теорема 3. *Пусть для* $S \subseteq (L_{max} \backslash L_{min})$ *выполняются условия: 1)* $W(\,L_{min} \cup S) \geq W(\,L_{min})$ *и 2)* $W(\,L_{min} \cup R) < W(\,L_{min})\ \ \forall R \subset S$. *Тогда* $L_{min} \cup S$ *- уточненная нижняя оценка. Если же выполняются условия: 3)* $W(\,L_{max} \backslash S) \geq W(\,L_{max})$*и 4)* $W(\,L_{max} \backslash R) < W(\,L_{max})\ \ \forall R \subset S$, *то* $L_{max} \backslash S$ *- уточненная верхняя оценка.*

Наихудший случай – когда $|L^*| = |L|/2$ и $\forall R: |R| \leq |L|/2, R \neq L^*$, выполнено $W(R) < W(\emptyset)$ и $W(L \backslash R) < W(L)$. В этих условиях алгоритм может осуществить полный перебор всех подмножеств $R \subseteq L$. В то же время для широкого круга задач со случайными параметрами средняя эффективность данного алгоритма оказывается достаточно высокой. Приведем результаты вычислительного эксперимента для рынка типа цепи с m ребрами, функциями спроса вида $D_i = \max\{0, d_i^f - c_i/2 * p\}$ и предложения $S_i(p) = c_i/2 * p, \text{если}\, p \leq 2d_i^f/c_i,\ S_i(p) = -d_i^f + c_i * p, \text{если}\, p > 2d_i^f/c_i, i = 1,..,m+1$. Их разность – линейная функция $\Delta S_i(p) = -d_i^f + c_i * p$. Коэффициенты c_i, d_i^f выбираются случайно при условиях $p_{i+1}(\vec{Q}^0) > p_i(\vec{Q}^0), i = 1,..,m$. Для каждого ребра $k = 1,2,..,m$ переменные затраты на увеличение пропускной способности составляют $e_k \Delta Q^2$. Коэффициенты e_k, а также затраты на передачу e_k^t , фиксированные издержки e_k^f и исходные пропускные способности Q_k^0, $k = 1,..,m$, являются случайными.

На рис. 1 указаны среднее и максимальное число подмножеств R, для которых решалась вспомогательная задача (2) вычисления $V(R)$ для определения L^*. Средняя сложность решения в диапазоне $10 - 25$ линий не превышает $8m$. В более широком диапазоне $10 - 50$ линий средняя сложность хорошо приближается полиномом $f_3(x) = 0.014 * x^3 - 0.16 * x^2 + 2.75 * x$.

В общем случае, однако, даже рынки типа цепи не обладают ни одним из указанных свойств (см. [3]). Тем не менее, в довольно общих условиях существует возможность разработки эффективных алгоритмов, подобных описанному. Рассмотрим соответствующие понятия для рынка с транспортной структурой общего вида.

Определение 1. *Ребро* q *называется дополнительным (соответственно конкурентным) к ребру* l , *если* $\forall M \subseteq L \backslash \{l, q\}$ *выполнено* $W\big(M \cup (q, l)\big) - W(M \cup q) \geq (\leq) W(M \cup l) - W(M)$.

Пусть $M_1(l)$ и $M_2(l)$ - множества дополнительных и конкурентных ребер к ребру l. Тогда $W(L_1 \cup L_2 \cup l) - W(L_1 \cup L_2) \uparrow L_1 \subseteq M_1(l)$ и $\downarrow L_2 \subseteq M_2(l)$. Алгоритмы, подобные предложенным для суб- и супермодулярных функций, применимы, если для любого $l \in L$ мы можем определить $M_1(l), M_2(l)$ и $M_1(l) \cup M_2(l) = L \backslash l$.

Возможность установить полные отношения дополнительности и конкурентности тесно связана со следующим условием.

Определение 2. *Рассматриваемая модель удовлетворяет условию инвариантности структуры потока (УИСП), если* $\forall\, \vec{Q} \geq \vec{Q}^0, (i,j) \in L\ sign\left(p_i(\vec{Q}) - p_j(\vec{Q})\right) = sign(p_i(\vec{Q}^0) - p_j(\vec{Q}^0))$.

Рассмотрим рынок типа цепи общего вида. Пусть $L_1 = \{(i,i+1) | p_{i+1}(\vec{Q}^0) > p_i(\vec{Q}^0)\}$, $L_2 = \{(i,i+1) | p_{i+1}(\vec{Q}^0) < p_i(\vec{Q}^0)\}$, $L = L_1 \cup L_2$.

Теорема 4. *Рынок удовлетворяет УИСП тогда и только тогда, когда* $\forall l = (i,i+1) \in L_1\ \ p_{i+1}(\vec{Q}^0_{L_1}, \vec{Q}^\infty_{L_2}) > p_i(\vec{Q}^0_{L_1}, \vec{Q}^\infty_{L_2})$ *и* $\forall l = (i,i+1) \in L_2$ $p_{i+1}(\vec{Q}^0_{L_2}, \vec{Q}^\infty_{L_1}) < p_i(\vec{Q}^0_{L_2}, \vec{Q}^\infty_{L_1})$, *где* $Q_i^\infty = \infty, i \in I$. *При этом условии* $\forall l \in L_1\ M_1(l) = L_1 \backslash l, M_2(l) = L_2, \forall l \in L_2\ M_1(l) = L_2 \backslash l, M_2(l) = L_1$.

Рассмотрим рынок типа звезды с $n+1$ узлами: $I = \{0\} \cup I_1 \cup I_2$, $R_1 = \{(i,0), i \in I_1\}, R_2 = \{(0,i), i \in I_2\}, L = R_1 \cup R_2$. При начальных пропускных способностях $\vec{Q}^0$ 0 является транзитным узлом, $I_1 = \{1,..,m\}$ - множество узлов-производителей, $I_2 = \{m+1,..,n\}$ - множество узлов-потребителей.

Теорема 5. *Для данного рынка УИСП выполнены тогда и только тогда, когда* $\forall i \in I_1\ p_i(\vec{Q}^0_{I_2}, \vec{Q}^\infty_{I_1}) \leq p_0(\vec{Q}^0_{I_2}, \vec{Q}^\infty_{I_1})$ *и* $\forall i \in I_2\ p_i(\vec{Q}^0_{I_1}, \vec{Q}^\infty_{I_2}) \geq p_0(\vec{Q}^0_{I_1}, \vec{Q}^\infty_{I_2})$. *При этом условии* $\forall l \in R_1\ M_1(l) = R_2$, $M_2(l) = R_1 \backslash l, \forall l \in R_2\ M_1(l) = R_1, M_2(l) = R_2 \backslash l$.

Рассмотрим наиболее общий случай, когда удается определить указанные отношения. Пусть паре $< N, L >$ соответствует граф типа дерева. Тогда для любых ребер l_1, l_2 существует единственный путь $L(l_1, l_2)$ без самопересечений, начинающийся с ребра l_1 и заканчивающийся ребром l_2. Назовем l_2 исходно дополнительным (соответственно конкурентным) к l_1, если при начальных пропускных способностях $\vec{Q}^0$ потоки на этих ребрах имеют одинаковые (соответственно противоположные) направления относительно пути $L(l_1, l_2)$. Обозначим $L_1^0(l)$, $L_2^0(l)$ множества исходно дополнительных и конкурентных ребер к l.

Теорема 6. *Рынок типа дерева удовлетворяет УИСП тогда и только тогда, когда* $\forall l = (i, j)$ $sign\left(p_i(\vec{Q}^0) - p_j(\vec{Q}^0)\right) = sign\left(p_i\left(\vec{Q}^0_{L_1^0(l)}, \vec{Q}^\infty_{L_2^0(l)}\right) - p_j\left(\vec{Q}^0_{L_1^0(l)}, \vec{Q}^\infty_{L_2^0(l)}\right)\right)$. *При этом условии* $\forall l\ M_1(l) = L_1^0(l)$, $M_2(l) = L_2^0(l)$.

Для графов, включающих цикл, ввести полные отношения конкурентности и дополнительности в общем случае не удается. Так, для графа на рис. 2 в зависимости от конкретных значений параметров модели ребро (3,4) может быть как конкурентным, так и дополнительным для ребра (1,2).

Литература

1. *Васин А.А., Дайлова Е.А.* (2014, a): Об оптимальной пропускной способности системы перемещения товара на двухузловом рынке // Вестник Московского университета. Серия 15: Прикладная математика и кибернетика. - No 3. - с.40-45.
2. *Guisewite G.M., Pardalos P.M.,* Minimum concave-cost network flow problems: Applications, complexity, and algorithms. Annals of Operations Research, 25 (1), 1990. p. 75-99.
3. *Vasin A., Dolmatova M.* Optimization of transmission capacities for multinodal markets. Procedia Computer Science. 91, 2016. p. 238-244.
4. *Stoft S.* Power System Economics: Designing Markets for Electricity. New York. Wiley, 2002.
5. *Arrow, K.J., Debreu, G.* (1954) “Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy” // Econometrica, 22, 265-290.
6. *Гасников А.В.* Заметка об эффективной вычислимости конкурентных равновесий в транспортно-экономических моделях // Математическое моделирование. – 2015. –Т. 27. - № 12. – С. 121-136.
7. *Хачатуров В.Р.* Математические методы регионального программирования. Наука, Москва, 1989 .

Рисунок 1. Васин, Григорьева, Цыганов. Оптимизация транспортной системы энергетического рынка.

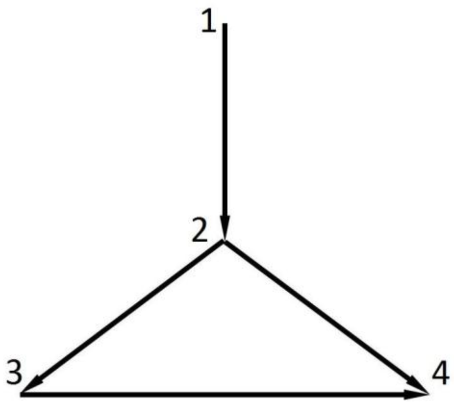

Рисунок 2. Васин, Григорьева, Цыганов. Оптимизация транспортной системы энергетического рынка.

Подписи к рисункам

Рисунок 1. Среднее и максимальное число вспомогательных задач при поиске L^*.

Рисунок 2. Граф без полных отношений дополнительности и конкурентности.

Optimization of energy market’s transport system.

Alexander Vasin, Olesya Grigoryeva, Nikita Tsyganov.

Исследование выполнено на кафедре исследования операций факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М.В. Ломоносова.
119899, Москва, Ленинские Горы, МГУ, 2-й учебный корпус, факультет вычислительной математики и кибернетики.
The research was performed at the Operations Research department of Moscow State University Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics.

Сведения об авторах

Васин Александр Алексеевич (для ведения переговоров и переписки), д.ф.-м.н., профессор, и. о. заведующего кафедрой исследования операций факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова.
e-mail: vasin@cs.msu.su, т. (495) 939-24-91.

Адрес для переписки: 119991, Москва, Ленинские горы, д.1, стр. 52, МГУ, факультет ВМиК.

Григорьева Олеся Максимовна, студентка 4 курса кафедры исследования операций факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова.
e-mail: olesyagrigez@gmail.com, т. (999) 996-75-52.

Адрес: 117149, Москва, Болотниковская ул., д. 20 к. 1, кв. 48.

Цыганов Никита Игоревич, магистр 2 курса кафедры исследования операций факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова.
e-mail: nikita--93@mail.ru, т. (909) 698-02-25.

Адрес: 115142, Москва, ул. Речников, д. 32, кв. 17.